Egenskaper, tid og hendelser

(Et teknisk notat)

av

Morten Harboe Rognes

2010

© 2010 Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

Dette er hovedsakelig et teknisk notat. Vi arbeider innenfor rammen av egenskapsteorien E;3. Denne har blitt utførlig behandlet i Rognes [4] og Rognes [5]. Det forutsettes at leseren har en relativt god innsikt i denne teori.

Det bør også understrekes at hensikten med dette notatet ikke er å belyse noen filosofiske temaer, men snarere å bevise tre satser som belyser egenskapene til en klasse av strukturer som vi her kaller egenskapsstrukturer. Hva som menes med en egenskapsstruktur er presist definert i §2. Vi gjør rede for hvilke satser det dreier seg om i denne innledningen og i §4. Satsene bevises i §5. I §6 ser vi på noen mulige sammenhenger mellom det som her omtales som egenskapsstrukturer og det vi tidligere, i Rognes [7], kalte for tilstandsstrukturer. Tilslutt avslutter vi dette notat med noen elementære satser om understrukturer til egenskapsstrukturer. Dette tema tas opp i §7.

Innholdet i de satsene vi skal bevise i §5 kan sammenfattes på følgende måte:

Er S en egenskapsstruktur kan vi definere entydig en ekvivalensrelasjon som er bestemt av denne egenskapsstrukturen S. Dette er en ekvivalensrelasjon over mengden av mulige verdener. Vi betegner denne ekvivalensrelasjonen med Ekv;S. Denne ekvivalensrelasjonen inndeler feltet av mulige verdener i ekvivalensmengder som bestemmer en utsagnsmengde U(Ekv;S). Mengden av de ekvivalensmengder over mengden av mulige verdener som er bestemt av Ekv;S betegner vi med (Ekv;S)*

Tilsvarende er det mulig, i forbindelse med en egenskapsstruktur S, å definere en mengde med utsagn som vi kaller elementærutsagnene bestemt av S. Vi betegner dem med E(S). Er Δ en vilkårlig delmengde av E(S) kaller vi konjunksjonen av alle de utsagnene som befinner seg i Δ U Mg(Neg(x): xê(E(S)-Δ) for tilstandsbeskrivelsen over S bestemt av Δ. Det første resultatet som vi skal vise, kan, gitt disse begrepsdannelsene, formuleres slik:

Er Δ en delmengde av E(S), og er tilstandsbeskrivelsen over S bestemt av Δ et konsistent utsagn, finnes det en entydig bestemt ekvivalensmengde x i (Ekv;S)* slik at sannhetsmengden til tilstandsbeskrivelsen over S bestemt av Δ er identisk med x. Det omvendte holder også: Er x en ekvivalensmengde i (Ekv;S)* finnes det en entydig bestemt mengde Δ som er inkludert i E(S), slik at sannhetsmengden til tilstandsbeskrivelsen bestemt av Δ er identisk med x.

Den minste mengden av utsagn som inneholder elementærutsagnene i E(S) og som er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon betegner vi med C(E(S)). Vårt andre resultat er at denne utsagnsmengden C(E(S)) er identisk med mengden av de utsagn som er bestemt av ekvivalensrelasjonen Ekv;S, med andre ord U(Ekv;S). Denne påstanden bevises ved hjelp av resultatet ovenfor samt et normalformsteorem som er bevist i Rognes [6]

I forbindelse med en egenskapsstruktur S definerer vi også visse hendelsesbegreper. Vi definerer først hva som menes med en positiv og en negativ elementærhendelse over S. Dernest defineres hva som menes med en sammensatt hendelse over S. Endelig definerer vi hva som menes med en hendelse i vid forstand over S. Er h en hendelse av en eller annen av

© 2010 Morten Harboe Rognes

disse typene definerer vi også hva som menes med at h foreligger realisert i en mulig verden. Det tredje resultatet vi skal gi bevis for kan nå sammenfattes på følgende måte:

Anta x er et konsistent utsagn, og at x er med i U(Ekv;S). Da finnes det en hendelse i vid forstand, H, som er slik at mengden av alle de verdener hvor H foreligger realisert er identisk med sannhetsmengden til utsagnet x. Omvendt er det slik at dersom x er et utsagn, og sannhetsmengden til dette utsagnet er identisk med mengden av alle de verdener hvor en hendelse i vid forstand H foreligger realisert, så er x med i U(Ekv;S). Man ser altså at dette resultatet gir en alternativ karakteristikk U(Ekv:S).

Hensikten med dette notatet er altså ikke noe annet enn å formulere disse resultatene presist og i tillegg gi detaljerte bevis for dem.

§2 Egenskapsstrukturer

I det følgende skal vi anta at Tp er en på forhånd fiksert, ikke-tom mengde. Tp representerer mengden av alle tidspunkter. Vi kan så definere hva vi mener med en egenskapsstruktur. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.1 Med en egenskapsstruktur S forstås en struktur S= <A,D,T> der komponentene A,D og T oppfyller følgende to krav:
(i) A, D og T er ikke-tomme mengder der T er inkudert i Tp
(ii) Er fêA, er f et binært attributt, det vil si en binær egenskap, som oppfyller det følgende krav:

(+) (Ax)(Ay)(<x,y>êEkst;w(f) → yêTp

Vi skal kalle den siste komponenten i en egenskapsstruktur S, mengden T, for tidspunktene i S.

Vi definerer så mengden av elementærutsagn over en egenskapsstruktur S:

Definisjon 2.2 Anta S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da er mengden av elementærutsagn over S, E(S) definert slik:

E(S) = Mg(μ;-1(Mg(w: wêI & <x,y>êEkst;w(f))) : <x,y>êDxT & fêA)

Er S=<A,D,T> en egenskapsstruktur, f en egenskap i A og x,t elementer i henholdsvis D og T ser man at Mg(w: wêI & <x,y>êEkst;w(f)) er mengden av alle de mulige verdener w der paret <x,y> er med i ekstensjonen til egenskapen f i verdenen w.

μ;-1(Mg(w: wêI & <x,y>êEkst;w(f))) vil være det utsagnet hvis sannhetsmengde er denne mengden. Man kan si at dette utsagnet er det utsagn som sier at paret <x,y> har egenskapen f i verdenen w. Vi kunne ha betegnet dette med f(x,y). Innholdet i Definisjon 2.2 er derfor at elementærutsagnene over strukturen S er mengden av de diverse utsagnene f(x,t) ettersom <x,t> gjennomløper DxT og f mengden av egenskaper A.

Anta nå at S= <A,D,T> er en egenskapsstruktur. La w og w' være to mulige verdener. Da skal vi si at w og w' er S-ekvivalente, Ekv;S(w,w') hvis og bare hvis vi har:

(Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT → (<x,t>êEkst;w(f) ↔ <x,t>êEkst;w'(f)))

Man ser altså at det at to verdener w og w' er S-ekvivalente ikke innebærer noe annet en at dersom f er en egenskap og <x,t> et vilkårlig par i DxT så er <x,t> med i ekstensjonen til egenskapen f i verdenen w hvis og bare <x,t> er med i ekstensjonen til f i verdenen w'. I lys av Definisjon 2.2 kan dette også uttrykkes ved å si at at to verdener er S-ekvivalente dersom vi har for ethvert elementærutsagn u over S at dette er sant i w hvis og bare hvis det er sant i verdenen w'.

© 2010 Morten Harboe Rognes

Denne ekvivalensrelasjonen kan defineres presist slik:

Definisjon 2.3 Anta S= <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da setter vi:
Ekv;S = Mg(<w,w'>: w,w'êI & (Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT →
(<x,t>êEkst;w(f) ↔ <x,t>êEkst;w'(f)))

Det er trivielt å verifisere at dette er en ekvivalensrelasjon over mengden av mulige verdener I. Vi betegner mengden av ekvivalensmengder som genereres av Ekv;S med (Ekv;S)*. Videre definerer vi mengden av utsagn som er bestemt av ekvivalensrelasjonen Ekv;S som mengden av alle de utsagn uêU der vi har at det finnes en delmengde c av (Ekv;S)* slik at sannhetsmengden til u er UN(c). Vi betegner mengden av utsagn bestemt av ekvivalensrelasjonen Ekv;S med U(Ekv;S). De begrepene vi her har innført kan formelt defineres slik:

Definisjon 2.4
(i) (Ekv;S)* = Mg(Mg(w: wêI & Ekv;S(w,w')): w'êI)
(ii) U(Ekv;S) = Mg(u: uêU & (Ec)(c Inkl (Ekv;S)* & μ(u) = UN(c)))

Anta at Δ Inkl E(S) der S er en egenskapsstruktur. Vi kaller da konjunksjonen av alle utsagnene i mengden Δ U Mg(Neg(u): uê(E(S)- Δ)) for tilstandsbeskrivelsen over S bestemt av utsagnsmengden Δ. Vi betegner tilstandsbeskrivelsen over S bestemt av utsagnsmengden Δ med φ;S(Δ). Formelt sett defineres dette begrepet slik:

Definisjon 2.5 Anta S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur og Δ Inkl E(S). Da setter vi:
φ;S(Δ) = SNu(Δ U Mg(Neg(u): uê(E(S)- Δ)))

Er det klart hvilken egenskapsstruktur S vi har i tankene skriver vi bare "φ(Δ)" istedet for det mer kompliserte uttrykket "φ;S(Δ)".

§3 Hendelser

Anta S= <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Vi sier da at h er en *positiv elementærhendelse* over S hvis og bare hvis det finnes fêA og <x,t>êDxT slik at h= <1,f,<x,t>>. Tilsvarende sier vi at h er en *negativ elementærhendelse* over S hvis og bare hvis det finnes fêA og <x,t>êDxT slik at h= <0,f,<x,t>>. h er en *elementærhendelse* over S hvis og bare hvis h enten er en positiv elementærhendelse over S eller en negativ elementærhendelse over S. Vi betegner mengden av positive elementærhendelser over S med Pos(S). Mengden av de negative elementærhendelsene over S betegnes med Neg(S). Klassen av elementærhendelser over S betegner vi med ElemH(S). Man har altså at ElemH(S) = Pos(S) U Neg(S).

Er h = <1,f,<x,t>> en positiv elementærhendelse, der fêA og <x,t>êDxT, sier vi at h foreligger realisert i verdenen w hvis og bare hvis vi har at wêI & <x,t>êEkst;w(f), med andre ord, hvis og bare hvis <x,t> er med i ekstensjonen til egenskapen f i verdenen w. Er h= <0,f,<x,t>> en negativ elementærhendelse, der fêA og <x,t>êDxT, sier vi at h foreligger realisert i verdenen w hvis og bare hvis wêI & ¬(<x,t>êEkst;w(f)).

Med en *sammensatt hendelse* over egenskapsstrukturen S forstår vi en hvilken som helst ikke tom mengde av elementærhendelser over S. Vi har altså at h er en sammensatt hendelse over S hvis og bare hvis h≠ø og h Inkl ElemH(S). Mengden av sammensatte hendelser over S betegner vi med Hend(S). En sammensatt hendelse h foreligger realisert i

© 2010 Morten Harboe Rognes

den mulige verdenen w hvis og bare hvis alle elementærhendelsene som er med i h foreligger realisert i h. Bruker vi "Real(h,w)" som forkortelse for "h foreligger realisert i verdenen w" har vi altså at følgende gjelder, dersom h er en sammensatt hendelse:

Real(h,w) ↔ (Aa)(aêh → Real(a,w))

Vi skal også operere med noe vi kaller *hendelser i vid forstand.* Vi sier at H *er en hendelse i vid forstand over egenskapsstrukturen S* hvis og bare hvis H er en ikke-tom mengde av sammensatte hendelser over S som oppfyller de følgende krav: (i) Enhver sammensatt hendelse h som er med i H er realisert i en eller annen verden w. (ii) Er h,h' to distinkte sammensatte hendelser som er med i H finnes det ingen mulig verden w slik at både h og h' er realisert i verdenen w. Vi betegner mengden med hendelser i utvidet forstand over egenskapsstrukturen S med Hend*(S). Vi kan gir den følgende, mer formelle, definisjon i tillegg til den definisjonen som har blitt gitt rett ovenfor:

Definisjon 3.1 Anta S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da setter vi:

HêHend*(S) hvis og bare hvis man har:

(i) ø≠H Inkl Hend(S)

(ii) (Ah)(hêH → (Ew)(wêI & (Aa)(aêh → Real(a,w))))

(iii) (Ah)(Ah')(h,h'êH & h≠h' →
¬(Ew)(wêI & (Aa)(aêh → Real(h,w)) & (Aa)(aêh' → Real(h',w))))

Vi skal snakke om sannhetsmengden til en hendelse H i vid forstand over S. Dette er mengden av alle de verdener w hvor en eller annen sammensatt hendelse h som er med i H foreligger realisert. Vi betegner denne mengden med j(H) og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 3.2 Anta S= <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Anta HêHend*(S). Da setter vi:

j(H) = Mg(w: wêI & (Eh)(hêH & (Aa)(aêh → Real(a,w))))

Vi har nå gjort rede for de begrepsdannelsene vi trenger for å kunne formulere de viktigste satsene vi skal bevise i dette arbeidet.

§4 Resultater

Vi skal, som nevnt innledningsvis, ta for oss tre satser. Den første av dem er dette teoremet:

Teorem 4.1 Anta S = <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da gjelder følgende:

(a) Er ø≠Δ Inkl E(S) og er φ(Δ) et konsistent utsagn har vi:
(E!x)(xê(Ekv;S)* & μ(φ(Δ)) = x)

(b) Er xê(Ekv;S)* finnes det en og bare en mengde Δ Inkl E(S) slik at μ(φ(Δ)) = x

Man ser at det fra denne påstanden følger, dersom S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur, at det finnes en en-entydig avbildning ξ av Γ = Mg(Δ: ø≠ Δ Inkl E(S) & Cons({φ(Δ)})) på (Ekv;S)* som er slik at μ(φ(Δ)) = ξ(Δ) såfremt Δêl'.

La oss før vi går videre nevne at dersom Δ er en vilkårlig mengde med utsagn er C(Δ) den minste utsagnsmengden som inneholder Δ, og som dessuten er lukket under uendelig konjunksjon og negasjon. Det første innebærer at dersom X er en vilkårlig delmengde av C(Δ) så er også konjunksjonen av alle utsagnene i X, det vil si SNu(X), med i C(Δ). Det andre innebærer at dersom x er et vilkårlig utsagn som er med i C(Δ) så er også utsagnet som er

© 2010 Morten Harboe Rognes

negasjonen av x, med andre ord Neg(x), med i C(Δ).

Ved hjelp av Teorem 4.1 og normalformsteoremet for utsagn[1] kan man gi et bevis for vårt andre hovedresultat. Det dreier seg om det følgende teorem:

Teorem 4.2 Anta S = <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da har vi at det følgende holder:
U(Ekv;S) = C(E(S))

Teoremet sier at mengden av de utsagn som er bestemt av Ekv;S er identisk med den minste utsagnsmengden som inneholder alle elementærutsagnene over S og som er lukket under uendelig konjunksjon og negasjon. Denne satsen kan neppe regnes som triviell siden beviset for Teorem 4.1 og normalformsteoremet ikke akkurat kan regnes som trivielle.

Den tredje satsen vi skal gi bevis for er:

Teorem 4.3 Anta S = <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Anta x er et vilkårlig utsagn. Da gjelder følgende:
xêU(Ekv;S) & μ(x)≠ø ↔ (EH)(HêHend*(S) & j(H) = μ(x))

Denne satsen gir en alternativ karakteristikk av utsagnsmengden bestemt av ekvivalens-relasjonen Ekv;S. Man ser at kondisjonalen mot høyre i satsen sier at dersom x er et konsistent utsagn som er med i U(Ekv;S) finnes en hendelse H i vid forstand over S der sannhetsmengden til H er identisk med sannhetsmengden til x. Omvendt innebærer kondisjonalen mot venstre at dersom x er et utsagn, og det finnes en hendelse H i vid forstand over S hvis sannhetsmengde er identisk med sannhetsmengden til x, så er utsagnet x med blant utsagnene som er bestemt av Ekv;S.

Det skulle være lett å se at teoremet ovenfor også kan formuleres på følgende måte:

Teorem 4.3.1 Anta S = <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da har vi:
U(Ekv;S) = Mg(x: xêU & (μ(x)=ø v (EH)(HêHend*(S) & j(H) = μ(x))))

Vi har dermed presentert de teoremene som vi ønsker å bevise i dette skrift.

§5 Bevis

Hensikten med dette avsnittet er å gi detaljerte bevis for de satsene vi har nevnt i forrige paragraf. Vi starter med beviset for Teorem 4.1.

Bevis for Teorem 4.1 Vi gir først et bevis for punkt (a) i denne satsen. Anta S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur. Anta videre at (1) ø≠ Δ Inkl E(S) og at (2) φ(Δ) er et konsistent utsagn. Det er nødvendig å vise at det finnes noe x0 som er slik at

(+) x0ê (Ekv;S)* & μ(φ(Δ)) = x0. Vi skal konstruere en slik x0.

Siden φ(Δ) er et konsistent utsagn finnes det en verden w0 slik at
(3) w0êI & w0ê μ(φ(Δ)). Vi konstruerer x0 ved å sette:

(4) x0= Mg(w': w'êI & Ekv;S(w',w0))

Det vil nå være nok å vise at x0 definert på denne måten oppfyller kravet (+). Fra (4), definisjonen av x0, ser man umiddelbart at x0ê(Ekv;S)*. Dette viser at den første halvdelen av (+) holder. Vi må imidlertid også vise at den andre konjunkten i (+) holder.

1 Se Rognes [6]

© 2010 Morten Harboe Rognes

Først tar vi for oss inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at (5) w'êμ(φ(Δ)). Det vil da være tilstrekkelig å vise at Ekv;S(w',w0). Fra (5) og definisjonen av φ(Δ) følger:

(6.1) (Ay)(yêΔ → w'êμ(y))

(6.2) (Ay)(yê(E(S)- Δ) → w'ê μ(Neg(y))) Dette er ekvivalent med:

(6.3) (Ay)(yê(E(S)-Δ) → ¬(w'êμ(y)))

På tilsvarende vis følger fra den andre konjunkten i (3):

(7.1) (Ay)(yêΔ → w0êμ(y)) og

(7.2) (Ay)(yê(E(S)-Δ) → ¬(w0êμ(y)))

For å vise at Ekv;S(w',w0) vil det være tilstrekkelig å bevise:

(++) (Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT → (<x,t>êEkst;w'(f) ↔ <x,t>êEkst;w0(f)))

Anta derfor for vilkårlige f,x og t at (8) fêA og <x,t>êDxT. Definer nå utsagnet u0 ved:

u0 = Mg(w: wêI & <x,t>êEkst;w(f))

Man ser da ved hjelp av definisjonen av elementærutsagn at u0êE(S). Siden Δ Inkl E(S) ifølge (1) skiller vi mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): u0êΔ. Da følger ved hjelp av (6.1) og (7.1) at w'êμ(u0) og w0êμ(u0). Fra dette og definisjonen av u0 følger

<x,t>êEkst;w'(f) & <x,t>êEkst;w0(f). Fra dette følger selvfølgelig at <x,t>êEkst;w'(f) ↔ <x,t>êEkst;w0(f)). (++) holder derfor i dette tilfellet

Tilfelle (ii): u0ê(E(S)-Δ). Da følger ved hjelp av (6.3) og (7.2) at ¬(<x,t>êEkst;w'(f)) & ¬(<x,t>êEkst;w0(f)). Også fra dette følger <x,t>êEkst;w'(f) ↔ <x,t>êEkst;w0(f)). Man ser at (++) holder også i dette tilfellet.

I begge tilfelle holder (++). Dette viser at Ekv;S(w',w0) og derfor at w'êx0. Vi har dermed vist at inklusjonen mot høyre i μ(φ(Δ)) = x0 holder.

La oss nå vise inklusjonen mot venstre i μ(φ(Δ)) = x0. Anta for vilkårlig w' at w'êx0 for vilkårlig w'. Fra dette og (4), definisjonen av x0, følger (9) Ekv;S(w',w0). Fra dette og definisjonen av Ekv;S følger

(10) (Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT → (<x,t>êEkst;w'(f) ↔ <x,t>êEkst;w0(f)))

Vi må vise at w'êμ(φ(Δ)). I lys av definisjonen av φ(Δ) er det tilstrekkelig å vise at vi

(11.1) (Ay)(yêΔ → w'êμ(y)) og

(11.2) (Ay)(yê(E(S)-Δ) → ¬(w'êμ(y)))

Vi viser først (11.1): Anta yêΔ. Siden Δ ifølge (1) er inkludert i E(S) følger ved hjelp av definisjonen av E(S) at det finnes g,x',t' der (11.3) gêA og <x',t'>êDxT slik at (11.4) y= μ;-1(Mg(w: <x',t'>êEkst;w(g))). Nå følger det fra den andre konjunkten i (3) ovenfor at w0êμ(φ(Δ)). Dette impliserer ved hjelp av definisjonen av φ(Δ):

(12.1) (Ay)(yêΔ → w0êμ(y)) og

(12.2) (Ay)(yê(E(S)-Δ) → ¬(w0êμ(y)))

Siden vi antar yêΔ følger ved hjelp av (12.1) at w0êμ(y). Fra dette og (11.4) har vi <x',t'>êEkst;w0(g). Herav følger så ved hjelp av (10) at <x',t'>êEkst;w'(g) og derfor ved hjelp av (11.4) at w'êμ(y). Dette viser at (11.1) holder.

La oss så vise at (11.2). Anta for vilkårlig y at (13) yê (E(S)-Δ). Fra dette og definisjonen av E(S) følger at det finnes g,x',t' slik at

(14) y=Mg(w: wêI & <x',t'>êEkst;w(g)) hvor gêA og <x',t'>êDxT

Fra (13) og (12.2) kan man slutte ¬(w0êμ(y)). Fra dette og (14) følger ¬(<x',t'>êEkst;w0(g)). Fra dette og (10) kan man så slutte ¬(<x',t'>êEkst;w'(g)). Dette impliserer ¬(w'êμ(y)). Dette viser at også (11.2) holder.

Vi har dermed bevist at w'êμ(φ(Δ)), og følgelig også, siden w' var helt vilkårlig, at inklusjonen mot venstre i μ(φ(Δ))=x0 holder.

Det følger fra det som står ovenfor at dersom ø≠Δ Inkl E(S) og φ(Δ) er et konsistent

© 2010 Morten Harboe Rognes

utsagn så finnes det x slik at xê(Ekv;S)* & μ(φ(Δ)) = x. At denne x er entydig bestemt er trivielt. Dermed har vi levert et fullstendig bevis for punkt (a) i satsen.

Vi tar nå for oss punkt (b) i teoremet. Anta igjen at S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur. Anta for vilkårlig x at (1) xê(Ekv;S)* Da har vi at x≠ø og derfor at det finnes w0êI slik at (2) w0êx. Vi må vise at det det finnes Δ0 der vi har (+) Δ0 Inkl E(S) & μ(φ(Δ)) = x Det er i og for seg lett å konstruere en slik Δ0. Det er nok å definere Δ0 slik:

(3) Δ0 = Mg(y: yê E(S) & w0êμ(y))

Gitt denne definisjonen har vi åpenbart at Δ0 Inkl E(S). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise: (4) μ(φ(Δ0)) = x

Vi gir først et bevis for inklusjonen mot høyre i (4). Anta derfor for vilkårlig w' at (5) w'êμ(φ(Δ0)). Det følger da ved hjelp av definisjonen av Δ0 at

(6.1) (Ay)(yêΔ0 → w0ê μ(y))

(6.2) (ay)(yê(E(S) - Δ0) → ¬(w0êμ(y))

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise Ekv;S(w',w0). Dette innebærer i lys av definisjonen av Ekv;S at det vil være tilstrekkelig å vise:

(7) (Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT → (<x,t>êEkst;w'(f) ↔ <x,t>êEkst;w0(f)))

Anta derfor for vilkårlige f, x',t' at (8) fêA & <x',t'>êDxT. Definer utsagnet u;0 ved

(9) u;0 = μ;-1(Mg(w: wêI & <x',t'>êEkst;w(f))

Anta for reduktio ad absurdum at (10) <x',t'>êEkst;w'(f) & ¬(<x',t'>êEkst;w0(f)). Da følger at ¬(w0êμ(u;0)). Fra dette og (6.1) følger ¬(u;0êΔ0) og siden u;0ê E(S) har vi derfor (11) u;0ê (E(S)- Δ0). Fra (5) følger (Au)(uê(E(S)-Δ0) → ¬(w'êμ(u))). Fra dette og (11) følger ¬(w'êμ(u;0)) og derfor ¬(<x',t'>êEkst;w'(f)). Men dette strider mot den første konjunkten i (10). Dette viser at <x,t>êEkst;w'(f) → <x,t>êEkst;w0(f).

Anta på den annen side, også for reduktio ad absurdum, at

(12) ¬(<x',t'>êEkst;w'(f)) & <x',t'>êEkst;w0(f)

Da følger det ¬(w'êμ(u;0)). Siden det følger fra (5) at (Au)(uêΔ0 → w'êμ(u)) har vi at ¬(u;0êΔ0) og derfor at u;0ê(E(S)-Δ0). Fra dette og (6.2) følger i sin tur ¬(w0êμ(u;0)) og derfor ved hjelp av (9) at ¬(<x',t'>êEkst;w0(f)). Dette motsier åpenbart den andre konjunkten i (12). Det følger at (12) er umulig og at vi derfor har: <x,t>êEkst;w0(f) → <x,t>êEkst;w'(f).

Fra det vi nå har vist ser man at (7) holder og derfor at også inklusjonen mot høyre i (4) holder.

Vi tar nå for oss inklusjonen mot venstre i (4), med andre ord tar vi sikte på å bevise x Inkl μ(φ(Δ0)). Anta derfor for vilkårlig w' at (13) w'êx. Dette innebærer at Ekv;S(w',w0) og derfor ved hjelp av definisjonen av Ekv;S at

(14) (Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT → (<x,t>êEkst;w'(f) ↔ <x,t>êEkst;w0(f)))

Det vil være tilstrekkelig å bevise (15) w'êμ(φ(Δ0)) og derfor tilstrekkelig å vise:

(16.1) (Ay)(yêΔ0 → w'êμ(y))

(16.2) (Ay)(yê(E(S) - Δ0) → ¬(w'êμ(y)))

La oss først vise at (16.1) holder. Anta yêΔ0. Siden Δ0 inkl E(S) har vi at yêE(S) og derfor at det finnes f, x',t' slik at (17) y = Mg(w: wêI & <x',t'>êEkst;w(f)) & <f,x',t'>êAxDxT. Siden yêE(S) har vi ved hjelp av (3) at w0êy. Fra dette og (17) kan vi derfor slutte: (18) <x',t'>êEkst;w0(f). Fra (18) og (14) følger <x',t'>êEkst;w'(f) og derfor w'êμ(y). Dette viser at (16.1) holder.

For å vise at (16.2) holder, anta for vilkårlig for vilkårlig y at (19) yê(E(S)-Δ0). Da må det i lys av definisjonen av E(S) finnes f,x',t' slik at

(20) y= Mg(w:wêI & <x',t'>êEkst;w(f)) & <f,x',t'>êAxDxT

© 2010 Morten Harboe Rognes

Fra (3) ovenfor følger (Ay)(yê(E(S)-Δ0) → ¬(w0êμ(y)). Dette og (19) impliserer ¬(w0êμ(y)) og derfor i lys av (20) at ¬(<x',t'>êEkst;w0(f)). Fra dette (20) og (14) kan vi slutte ¬(<x',t'>êEkst;w'(f)) , og derfor ved hjelp av (20) at ¬(w'êμ(y)). Dette viser at (16.2) holder.

Vi har nå vist at dersom xê(Ekv;S)* finnes det Δ der Δ Inkl E(S) & μφ(Δ)) =x. Vi må imidlertid vise at en slik Δ er entydig bestemt. Anta xê(Ekv;S)*, og anta for reduktio at absurdum at det finnes Δ,Δ' der Δ ≠ Δ' og der vi har:

(21) Δ Inkl E(S) & μ(φ(Δ)) =x

(22) Δ' Inkl E(S) & μ(φ(Δ')) =x

Siden Δ ≠ Δ' må det enten finnes noe y der vi har yêΔ & ¬(yêΔ'), eller så må det finnes y der ¬(yêΔ) & yêΔ'.

Tilfelle (i): (23) yêΔ & ¬(yêΔ') for noe y. Siden x≠ø har vi at w0êx for en eller annen verden w0. Det følger fra dette og (21) og (22) at w0êx = μ(φ(Δ)) = μ(φ(Δ')). Fra dette og definisjonen av φ(Δ) følger

(24) (Ay)(yêΔ → w0êμ(y))

(25) (Ay)(yê(E(S)-Δ') → ¬(w0êμ(y))

Man ser umiddelbart at (23) - (25) leder til en motsigelse.

Tilfelle (ii) yêΔ' & ¬(yêΔ) for noe y. Dette tilfellet behandles på akkurat samme måte. Dette viser at den Δ det er tale om i teoremet er entydig bestemt.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 4.1. **QED**

Vi går nå over til beviset for Teorem 4.2. Før vi går videre skal vi imidlertid formulere normalformteoremet for utsagn. Anta Δ er en vilkårlig utsagnsmengde og at X er en delmengde av Δ. Da definerer vi κ(X,Δ) ved:

κ(X,Δ) = SNu(X, Mg(Neg(x): xê(Δ-X))

Gitt denne definisjonen kan normalformteoremet formuleres slik:

Normalformteorem Anta Δ er en ikke-tom utsagns mengde. Da gjelder for alle xêU:
xêC(Δ) ↔ (EΓ)(Γ Inkl Pt(Δ) & x= UNu(Mg(κ(X,Δ): XêΓ)))

La oss så gå over til beviset for Teorem 4.2

Bevis for Teorem 4.2 Anta (1) at S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur. Fra Teorem 4.1 følger det temmelig umiddelbart at mengden av alle Δ der ø≠Δ Inkl E(S) & φ(Δ) er et konsistent utsagn kan avbildes en-entydig på (Ekv;S)*. Fra dette kan man slutte at det finnes en funksjon ξ som oppfyller følgende krav:

(2) Dom(ξ) = Mg(Δ: ø≠Δ Inkl E(S) & μ(φ(Δ)) ≠ø)

(3) ξ : Dom(ξ) -(1-1, på) → (Ekv;S)*

(4) (AΔ)(ΔêDom(ξ) → μ(φ(Δ)) = ξ(Δ))

A Vi skal vise at U(Ekv;S) = C(E(S)). Vi beviser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig x at (5) xêU(Ekv;S). Da følger ved hjelp av definisjonen av U(Ekv;S) at det finnes c der vi har: (6) c Inkl (Ekv;S)* & μ(x) = UN(c). Det er to muligheter når det gjelder c: c kan være den tomme mengden eller en ikke-tom mengde. Vi skiller derfor mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): c=ø. Det følger da at UN(c) =ø og derfor at μ(x)=ø. x er med andre ord det kontradiktoriske utsagnet. Sett nå Γ;0 = ø. Da har vi Γ;0 Inkl E(S). Videre har vi at

© 2010 Morten Harboe Rognes

Mg(φ(X): XêΓ;0) = ø og derfor at UNu(Mg(φ(X): XêΓ;0)) = μ-1(ø). Det følger derfor ved hjelp av normalformteoremet at μ;-1(ø)êC(E(S)). På den annen side har vi i dette tilfellet at μ(x)=ø og derfor at x=μ-1(ø). Det følger derfor at xêC(E(S)).

Tilfelle (ii): c≠ø. La oss per definisjon sette Z;0= Mg(ξ;-1(y): yêc) Ved hjelp av (2) kan vi da slutte at Z;0 Inkl Dom(ξ). Fra dette og (3) følger at (7) Z;0 inkl Pt(E(S)). Sett nå videre x;0 ved (8) x;0 = UNu(Mg(φ(x): xêZ;0)). Fra dette og (7) kan vi ved hjelp av normalformteoremet slutte at x;0 êC(E(S)). For å vise at xêC(E(S)) vil det derfor være tilstrekkelig å vise: x0=x. Nå har vi:

(9) μ(x;0) = μ(UNu(Mg(φ(x): xêZ;0))
= UN(Mg(μ(φ(x)): xêMg(ξ;-1(y):yêc)))
= UN(Mg(μ(φ(ξ;-1(y))): yêc)
= UN(Mg(ξ(ξ;-1(y)): yêc)) Dette holder i kraft av (4).
= UN(Mg(y: yêc))
= UN(c)
= μ(x) Denne siste identiteten følger fra (6)

Man ser altså at μ(x;0) = μ(x). Ved hjelp av identitetsaksiomet for utsagn følger da x=x;0, og derfor at xêC(E(S)).

Vi har dermed vist at U(Ekv;S) Inkl C(E(S)).

B Vi skal nå vise inklusjonen den andre veien, med andre ord at C(E(S)) Inkl U(Ekv;S). Anta derfor for vilkårlig x at (10) xêC(E(S)). Da må det i kraft av normalformsteoremet finnes Γ;0 slik at (11) Γ;0 Inkl Pt(E(S)) og der vi har: (12) x= UNu(Mg(φ(y): yêΓ;0))

Tilfelle (i): Γ;0= ø. Da har vi at

(13) x= UNu(Mg(φ(y): yêΓ;0)) = UNu(ø) = μ-1(ø).

Det følger at μ(x) =ø. Men vi har at (14) ø= UN(ø) & ø Inkl (Ekv;S)*. Det følger derfor at det finnes c slik at μ(x)= UN(c) & c Inkl (Ekv;S)*. Fra dette følger at xêU(Ekv;S). Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): Γ;0 ≠ø. Det kan være at noen av utsagnene φ(y) ettersom y gjennomløper Γ;0 er inkonsistente. Hvis alle er det, har vi at

μ(UNu(Mg(φ(y): yêΓ;0))) = UN({ø}) = ø og derfor x er det inkonsistente utsagn. På samme måte som i forrige tilfelle kan man da vise at xêU(Ekv;S). Satsen holder derfor i dette spesielle tilfellet. Anta på den annen side at ikke alle y der yêΓ;0 er slik at φ(y) er det det inkonsistente utsagn. La Γ;0' være Γ;0 minus de yêΓ;0 der φ(y) er inkonsistent. Da har vi: (15) (Ay)(yêΓ;0' → ø≠y Inkl E(S) & μ(φ(y))≠ø). Dette impliserer i lys av (2) at

(16) Γ;0' Inkl Dom(ξ).

Dessuten må vi ha: (17) x= UNu(Mg(φ(y): yêΓ;0)) = UNu(Mg(φ(y): yêΓ;0')

Sett (18) Q = Mg(ξ(y): yêΓ;0'). Siden ξ er en-entydig og på (Ekv;S)* har vi da

(19) Γ;0' = Mg(ξ;-1(x): xêQ) Ved hjelp av dette og (17) har vi:

(20) μ(x) = μ(UNu(Mg(φ(y): yêΓ;0')))
= UN(Mg(μ(φ(y)): yêΓ;0'))
= UN(Mg(μ(φ(y)): yêMg(ξ;-1(x): xêQ))
= UN(Mg(μ(φ(ξ;-1(x))): xêQ)
= UN(Mg(ξ(ξ;-1(x)): xêQ) Dette holder i kraft av (4).
= UN(Mg(x): xêQ)
= UN(Q)

Siden Q Inkl (Ekv;S)* følger det at xêU(Ekv;S). Dette viser at inklusjonen mot venstre i teoremet også holder. **QED**

Tilslutt viser vi det tredje resultatet som ble nevnt i §4.

© 2010 Morten Harboe Rognes

Bevis for Teorem 4.3 Anta S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur og at x er et vilkårlig utsagn.

A Vi viser først at kondisjonalen mot venstre i teoremet holder. Anta derfor (1) HêHend*(S) & j(H) = μ(x). Vi må da vise at xêU(Ekv;S), med andre ord at det finnes c der man har der man har c Inkl (Ekv;S)* & μ(x) =UN(c) & μ(x) ≠ø. Siden j(H) = μ(x) etter antagelsen (1) vil det være nok å vise:

(+) c Inkl (Ekv;S)* & j(H) =UN(c) & j(H) ≠ø for noe c.

Er aêH definerer vi q(a) ved å sette: (2) q(a) = Mg(w: wêI & (Ah)(hêa → Real(h,w)) La oss gjøre oppmerksom på at vi i det følgende bruker [w];S for å betegne S-ekvivalensmengden til verdenen w. Vi setter altså per definisjon:

[w];S = Mg(w': w'êI & Ekv;S(w',w)) om wêI

Vi skal i første omgang bevise (3) q(a) = UN/wêq(a)/([w];S) om aêH. Anta derfor at a er et vilkårlig element i H. Inklusjonen mot høyre i (3) er triviell. For anta at w'êq(a). Da har vi etter definisjonen av q at w'êI. Siden Ekv;S er en ekvivalensrelasjon har vi Ekv;S(w',w') og derfor at w'ê[w'];S. Siden w' også er med i q(a) følger det trivielt at w'ê UN/wêq(a)/([w];S). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

La oss så bevise inklusjonen mot venstre. Anta for vilkårlig w' at w'êUN/wêq(a)/([w];S). Da finnes det w slik at (4) wêq(a) & w'ê[w];S. Fra dette følger (5) Ekv;S(w,w'). Det er nødvendig å vise w'êq(a), det vil si:

(6) w'êI & (Ah)(hêa → Real(h,w'))

At w'êI følger umidelbart fra den andre konjunkten i (4) sammen med definisjonen av [w];S. Anta nå for vilkårlig h at hêa. Da har vi at h er en elementær hendelse over S siden a er en sammensatt hendelse som er med i H. Vi skiller mellom to tilfeller.

Tilfelle (i): h er en positiv elementærhendelse. Da har vi (7) h= <1, f, <x',t'>> for visse elementer f,x',t' der fêA & <x',t'>êDxT. I lys av (4) har vi at wêq(a) og derfor i lys av definisjonen av q(a) at (Ah')(h'êa → Real(h',w)). Det følger at Real(h,w). Fra dette, (7) og definisjonen av hva som menes med "Real(h,w)" følger at <x',t'>êEkst;w(f). Fra dette, (5) og definisjonen av Ekv;S følger <x',t'>êEkst;w'(f). Dette impliserer i sin tur at Real(h,w'). Man ser at (6) holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): h er en negativ elementærhendelse. Da har vi (8) h= <0,f,<x',t'>> for visse elementer f,x',t' der fêA og <x',t'>êDxT. Siden wêq(a) ifølge (4) følger (Ah)(hêa → Real(h,w)). Siden hêa følger Real(h,w). Fra dette og definisjonen av "Real" følger ¬(<x',t'>êEkst;w(f)). Siden Ekv;S(w',w) ifølge (5) kan vi herav slutte ¬(<x',t'>êEkst;w'(f)). Dette impliserer Real(h,w'). Man ser at (6) også holder i dette tilfellet.

Man ser at (6) holder i begge tilfelle. Vi har dermed vist at inklusjonen mot venstre i (3) holder og dermed levert et fullstendig bevis for (3).

Ved hjelp av definisjonen av j(H) og definisjonen av q(a) følger at

(9) j(H) = UN/aêH/(q(a))

Definer c;0 ved å sette (10) c;0 = Mg([w];S : wêUN/aêH/(q(a)). Da følger det at

(11) c;0 Inkl (Ekv;S)*.

Vi skal vise at (12) j(H) = UN(c;0). I lys av (9) og (10) vil det være nok å vise at UN(c;0) = UN/aêH/(q(a)). Anta for vilkårlig w at wêUN(c;0). Da har vi at det finnes x der (13) xêc;0 & wêx. Siden xêc;0 følger ved hjelp av (10) at

(14) x=[w'];S & w'êq(a) & aêH for noe w' og a. Fra den andre konjunkten i (13) og den første i (14) følger (15) Ekv;S(w,w'). Nå følger det fra inklusjonen mot venstre i (3) at (Aw)(wêq(a) → (Aw')(Ekv;S(w',w) → wêq(a))) om aêH. Fra dette, den andre komponenten i (14) og (15) følger wêq(a). Vi har derfor wêq(a) for noe aêH. Dette

© 2010 Morten Harboe Rognes

impliserer at wêUN/aêH/(q(a)). Anta på den annen side at wêUN/aêH/(q(a)). Siden wê[w];S følger det at wêUN(c;0). Vi har altså at UN(c;0) = UN/aêH/(q(a)) og derfor at (12) holder. Fra (11) og (12) følger at (Ec)(c Inkl (Ekv;S)* & j(H) = c). Det gjenstår bare å vise at j(H)≠ø. Siden H er en en hendelse i vid forstand over S følger det at det finnes en sammensatt hendelse a som er med i H og som er realisert i en eller annen verden w. Med andre ord finnes a og w slik at aêH & (h)(hêa → Real(h,w)). Fra dette siste følger, siden wêI, og (9) holder at wêq(a) Inkl UN/a'êH/(q(a')) = j(H). Herav har vi så j(H) ≠ø.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for halvdelen mot venstre i teoremet.

B Det som nå står for tur er å vise kondisjonalen mot høyre i Teorem 4.3. Anta (1) xêU(Ekv;S) & μ(x)≠ø. Fra dette og definisjonen av U(Ekv;S) følger det at det finnes en c;0 slik at (2) ø≠ c;0 Inkl (Ekv;S)* & μ(x) = UN(c;0).

For å gjennomføre beviset for satsen er det nødvendig å definere en hendelse i vid forstand H som oppfyller følgende krav:

(3.1) ø ≠H Inkl Hend(S)

(3.2) (Aa)(aêH → (Ew)(wêI & (Ah)(hêa → Real(h,w))))

(3.3) (Aa)(Ab)(a,bêH & a≠b → ¬(Ew)(wêI & (Ah)(hêa → Real(h,w)) & (Ah)(hêb → Real(h,w))))

I henhold til (2) har vi c;0≠ø. Siden c;0 Inkl (Ekv;S)* er c;0 en mengde av innbyrdes disjunkte og ikke-tomme Ekv;S-ekvivalensmengder. Man kan derfor ved hjelp av utvalgsaksiomet slutte at det finnes en utvalgsfunksjon ξ der vi har:

(4) Dom(ξ)=c;0 & (Ay)(yêc;0 → ξ(y)êy)

Vi skal nå konstruere H. Først definerer vi Pos(w) og Neg(w) slik:

(5.1) Pos(w) = Mg(<1,f,<x',t'>>: fêA & <x',t'>êDxT& <x',t'>êEkst;w(f))

(5.2) Neg(w) = Mg(<0,f,<x',t'>>: fêA & <x',t'>êDxT& ¬(<x',t'>êEkst;w(f)))

Det forutsettes at wêI. Dernest definerer vi H ved å sette:

(6) H= Mg(Pos(ξ(y))UNeg(ξ(y)) : yêc;0)

Det vil nå være tilstrekkelig å vise at H definert på denne måten oppfyller kravene (3.1) - (3.3) og at vi dessuten har at j(H) = μ(x). Vi gjør dette under punkt (a) - (d) nedenfor.

(a) Vi har åpenbart at Pos(ξ(x)) er en mengde av positive elementærhendelser, og at Neg(ξ(x)) er en mengde med negative elementærhendelser, om xêc;0. Det følger at Pos(ξ(x))UNeg(ξ(x)) for hvert xêc;0 er en sammensatt hendelse og at H derfor er en mengde av sammensatte hendelser, vi har med andre ord at H Inkl Hend(S). Siden c;0 ≠ ø følger det at x0êc;0 for noe x0. Det følger at ξ(x0)êx0. Da har vi åpenbart at Pos(ξ(x0))UNeg(ξ(x0)) er et element i H. Det følger at H≠ø. Dette vise at (3.1) holder.

(b) Vi må naturligvis også vise at (3.2) holder. Anta for vilkårlig h at aêH. Da følger ved hjelp av (6) at a = Pos(ξ(x))UNeg(ξ(x)) for et eller annet element i c;0. Det vil nå åpenbart være tilstrekkelig å vise at (Ah)(hêa → Real(h,ξ(x))). Anta derfor for vilkårlig h at hêa. Da har vi hêPos(ξ(x))UNeg(ξ(x)). Er hêPos(ξ(x)) følger ved hjelp av (5.1) det finnes f,x',t' slik at fêA og <x',t'>êDxT slik at h= <1,f,<x',t'>> & <x',t'>êEkst;ξ(x)(f). Det skulle da være åpenbart at Real(h, ξ(x)). På tilsvarende vis ser man ved hjelp av (5.2) at Real(h,ξ(x)) om hêNeg(ξ(x)). Dette viser at H oppfyller kravet (3.2)

(c) Vi tar så for oss kravet (3.2). Anta a,bêH & a≠b. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w der man har:

(7) wêI & (Ah)(hêa → Real(h,w)) & (Ah)(hêb → Real(h,w))

Anta aêH. Ved hjelp av (6) har vi da at (8) a = Pos(ξ(x0))UNeg(ξ(x0)) for noe x0êc;0. Vi skal vise at Ekv;S(ξ(x0),w). Anta derfor for vilkårlige (9) f, x',t' at fêA & <x',t'>êDxT. Anta <x',t'>êEkst;ξ(x0)(f). Da har vi ved hjelp av (9) og (5.1) at <1,f,<x',t'>>êPos(ξ(x0)) og derfor <1,f,<x',t'>>êa Fra dette og den andre konjunkten i (7) følger at

© 2010 Morten Harboe Rognes

Real(<1,f,<x',t'>>, w) og derfor at <x',t'>êEkst;w(f). Anta på den annen side at ¬(<x',t'>êEkst;ξ(x0)(f)). Siden (9) forutsettes å være tilfelle har vi <0,f,<x',t'>>êNeg(ξ(x0)) og derfor at <0,f,<x',t'>>êa. Fra dette og den andre konjunkten i (7) følger Real(<0,f,<x',t'>>, w) og derfor ¬(<x',t'>êEkst;w(f)). Vi har altså

<x',t'>êEkst;ξ(x0)(f) ↔ <x',t'>êEkst;w(f)

Siden x',t' og f var vilkårlige objekter slik at (9) følger at (10) Ekv;S(ξ(x0),w)

Siden bêH har vi at (11) b = Pos(ξ(x1))UNeg(ξ(x1)) for noe x1êc;0. På nøyaktig samme måte som ovenfor viser vi da at (12) Ekv;S(ξ(x1,w). Fra (10) og (12) følger, siden Ekv;S er en ekvivalensrelasjon at Ekv;S(ξ(x0), ξ(x1)) og derfor siden x1,x0êc;0 Inkl (Ekv;S)* at x1=x0. Men dette, (8) og (11) impliserer at a=b som strider mot forutsetningen om a≠b. Vi har dermed vist at H oppfyller kravet (3.2).

(d) Det gjenstår å vise at j(H) = UN(c;0). Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w at (13) wêj(H). Ved hjelp av definisjonen av j følger da at det finnes a der (14) aêH & (Ah)(hêa → Real(h,w)) Fra det at aêH følger at a= Pos(ξ(x0))UNeg(ξ(x0)) for noe x0êc;0. På nøyaktig samme måte som under punkt (c) kan man vise Ekv;S(ξ(x0),w). Siden ξ(x0)êx0 êc;0 og x;0 er en Ekv;S-ekvivalensmengde følger at wêx0 & x0êc;0, og derfor wêUN(c;0). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

La oss så bevise inklusjonen mot venstre. Anta wêUN(c;0) for vilkårlig w. Da har vi at det finnes x0 der wêx0 & x0êc;0. Siden c;0 Inkl (Ekv;S)* følger det at x0ê(Ekv;S)*, og derfor, siden wêx0 at (14) Ekv;S(ξ(x0),w). Sett nå a0 = Pos(ξ(x0))UNeg(ξ(x0)). Da er det åpenbart at a0êH. Anta hêa0 for vilkårlig h.

Tilfelle (i): hêPos(ξ(x0)). Da finnes f,x',t' slik at h=<1,f,<x',t'>> slik at <x',t'>êEkst;ξ(x0)(f). Fra dette, definisjonen av Ekv;S og (14) følger <x',t'>êEkst;w(f) og derfor at Real(h,w).

Tilfelle (ii): hêNeg(ξ(x0)). Da finnes f,x',t' slik at h=<0,f,<x',t'>> slik at ¬(<x',t'>êEkst;ξ(x0)(f)). Fra dette, definisjonen av Ekv;S og (14) følger ¬(<x',t'>êEkst;w(f)) og derfor at Real(h,w).

Vi har altså at Real(h,w) i alle tilfelle. Siden h var et vilkårlig element i a0 har vi altså: (Ah)(hêa0 → Real(h,w)). Sammen med det at a0êH følger:

(Ea)(aêH & (Ah)(hêa → Real(h,w))). Men dette impliserer at wêj(H). Vi har dermed vist j(H) = UN(c;0).

Vi har nå levert et fullstendig bevis for Teorem 4.3. **QED**

§6 Egenskapsstrukturer og tilstandsstrukturer

Det kan være av en viss interesse å se på sammenhengen mellom det vi ovenfor har kalt egenskapsstrukturer og det vi tidligere, i Rognes [7], har kalt for tilstandsstrukturer. Formålet med dette avsnittet er bare å skissere en mulig sammenheng.

La oss først minne om definisjonen av en tilstandsstruktur. En tilstandsstruktur er et fire-tuple <I,T,Q,h> der I,T og Q er ikke-tomme mengder og h er en funksjon som avbilder mengden I inn i Q^T. I en tilstandsstruktur er det meningen at I representerer mengden av mulige verdener, T mengden av alle tidspunkter, Q mengden av alle mulige totaltilstander. En funksjon i Q^T er en funksjon som tilordner ethvert tidspunkt i mengden T en totaltilstand. Vi kaller en slik funksjon for en totalhistorie. Det er derfor meningen at h(w), for hvert wêI, representerer den totalhistorien som foreligger realisert i w.

Anta nå at S=<A,D,T> er en egenskapsstruktur. Da kaller vi alle parene i AxD for de atomære tilstandene i strukturen S. Videre skal vi si at en slik atomær tilstand <e,x>, der eêA

© 2010 Morten Harboe Rognes

og xêD, foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis vi har at paret <x,t> er med i ekstensjonen til egenskapen e i verdenen w. Det fremgår av dette at det ikke er noe i veien for at en atomær tilstand <e,x> kan foreligge realisert ved en rekke forskjellige tidspunkter siden det er intet som forhindrer at elementet x kan ha egenskapen e ved noen tidspunkter og savne den ved en rekke andre.

Med en totaltilstand over egenskapstrukturen S forstår vi et ordnet par <X, τ-X> der X er en mengde av atomære tilstander over S og τ er mengden av alle atomære tilstander over S. Vi har med andre ord at τ = AxD. En slik totaltilstand <X,τ-X> sier vi foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t hvis og bare hvis alle de atomære tilstandene i X foreligger realisert ved t i verdenen w, og alle de atomære tilstandene i τ-X ikke foreligger realisert ved t i denne verdenen.

Er w en vilkårlig mulig verden og t et vilkårlig tidspunkt i T vil det alltid finnes en totaltilstand <X,τ-X> som foreligger realisert ved t i denne verdenen w. Man kan nemlig la X være Mg(<a,x>: aêA & xêD & <x,t>êEkst;w(a)). Da vi åpenbart alle de diverse atomære tilstandene i X foreligge realisert ved t i verdenen w. Er sê(τ-X) har vi at det vil finnes a,x der s= <a,x> der aêA og xêD slik at ¬(<x,t>êEkst;w(a)). Det følger at ingen av tilstandene i τ-X kan foreligge realisert i w. Dette betyr at totaltilstanden <X,τ-X> foreligger realisert i w ved t.

På den annen side kan ikke to distinkte totaltilstander over S, la oss si <X1, τ-X1> og <X2,τ-X2>, foreligge realisert ved et eller annet tidspunkt t i en eller annen verden w. For anta for reduktio ad absurdum at dette var tilfelle. Da måtte vi ha X1≠X2. Man må da ta i betraktning to tilfeller: Anta at s er en atomær tilstand der (1) sêX1 & ¬(sêX2). Da har vi siden sêX1. Siden <X1,τ-X1> foreligger realisert ved t i w må vi ha at s foreligger realisert ved t i verdenen w. På den annen side har vi at sê(τ-X2) og at <X2, τ-X2> også foreligger realisert i w ved tidspunktet t. Men da kan ikke s foreligge realisert ved tidspunktet t i verdenen w. Man ser altså at (1) leder til en motsigelse. Ser vi på den mulighet at det skulle finnes s der ¬(sêX1) & sêX2 ser man at også denne muligheten leder til en motsigelse på akkurat samme måte. Konklusjonen blir derfor at det ikke kan finnes noen verden w og noe tidspunkt t slik at to distinkte totaltilstander kan foreligge realisert i w ved tidspunktet t.

Man har derfor at dersom w er en verden og t et tidspunkt i T kan det bare finnes én, og kun én, totaltilstand over S som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w.

Anta nå at S= <A,D,T> er en egenskapsstruktur. Vi kan da definere en tilstandsstruktur S* = <I*,T*,Q*,h*> som er entydig bestemt av S på følgende måte: Vi setter I* = I. Det vil si at vi lar I* være mengden av mulige verdener. Videre setter vi T*=T, tidspunktene i S* er altså tidspunktene i strukturen S. Nå det gjelder Q* lar vi denne være mengden av alle totaltilstander over S, med andre ord setter vi Q*= Mg(<X,τ-X>: XêPt(τ)), i det vi minner om at τ er mengden av alle atomære tilstander over S, ie. τ= AxD. Det gjenstår å definere funksjonen h*. I denne forbindelse definerer vi først ξ(w,t), der wêI og têT ved å sette:

ξ(w,t) = Mg(<a,x>: aêA & xêD & <x,t>êEkst;w(a))

Man ser at ξ(w,t) er mengden av alle de atomære tilstandene over S som er realisert ved t i verdenen w. Vi kan så definere h* for alle wêI ved:

h*(w) = λ/têT/(<ξ(w,t), τ - ξ(w,t>)

Det følger lett fra denne definisjonen at h*(w) ê Q*^T* om wêI. Vi har derfor at h* : I* → Q*^T*. Dermed har vi definert S* fullstendig. Er S en egenskapsstruktur, skal vi kalle tilstandsstrukturen S*, slik den er definert den ovenfor, for den kanoniske tilstandsstrukturen assosiert med S.

© 2010 Morten Harboe Rognes

Vi har så langt sett at man til enhver egenskapsstruktur S kan konstruere, på en svært naturlig måte, den kanoniske tilstandsstrukturen S'. Et svært naturlig spørsmål som ganske umiddelbart melder seg i denne forbindelse er om man kan gå den omvendte veien. Kan man med andre ord, gitt en tilstandsstruktur S generelt konstruere en egenskapsstruktur S' slik at den kanoniske tilstandstrukturen til S' er isomorf med S? Har man at dette er tilfelle skal vi si at S kan representeres ved en egenskapsstruktur.

Det virker som om det er betydelige problemer forbundet med å gi bevis for et resultat av denne art. Er S= <I,T,Q,h> en tilstandsstruktur er det meningen at elementene i Q representerer mulige totaltilstander som foreligger realisert ved de diverse tidspunktene i T i de forskjellige mulige verdenene. Disse totaltilstandene har et "holistisk", "ustrukturert" preg, og det virker ikke lett å se hvordan man kan finne et system av egenskaper A og objekter D slik at hver av disse totaltilstandene svarer til en viss mengde av egenskap-objekt par <a,x> der aêA og xêD. I det minste virker det helt utelukket at man, gitt en tilstandsstruktur S, *entydig* kan konstruere en egenskapsstruktur S' der den kanoniske tilstandsstrukturen S" assosiert med S' er isomorf med S.

Vi finner oss i øyeblikket helt ute av stand til å presentere noen virkelig generelle resultater av denne typen selvom vi ikke på det nåværende stadium kan fremlegge evidens som viser at dette er umulig. På den annen side ville det være frusterende om man ikke kunne fremlegge noen resultater i det hele tatt angående disse forhold. Vi skal imidlertid vise et ganske beskjedent teorem som etter vår mening kaster noe lys over de forhold vi her har nevnt.

Anta S = <I,T, Q,h> er en tilstandsstruktur. Vi skal da kalle S for *regulær* hvis og bare hvis h avbilder I en-entydig på Q^T, I er mengden av mulige verdenener og T er en mengde med tidspunkter. Satsen vi skal gi bevis for kan, gitt denne definisjonen, formuleres slik:

Er S = <I,T,Q,h> en regulær tilstandsstruktur, der Q er likemektig med potensmengden til en eller annen overtellbar mengde X, kan S representeres ved en egenskapsstruktur.

Som man sikkert ser er forutsetningene i denne påstanden svært sterke. Satsen er derfor ganske svak. Men, som antydet, er dette alt vi kan tilby på det nåværende stadium.

Før vi kan gå videre og formulere denne påstanden formelt som et teorem er det imidlertid nødvendig å fastsette hva vi mener med at to tilstandsstrukturer er isomorfe. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.1 Anta S=<I,T,Q,h> og S' = <I',T',Q', h'> er to tilstrandsstrukturer. Vi ssier da at de er isomorfe hvis og bare hvis vi har at I= I', T= T' og det finnes en en-entydig avbildning f av Q på Q' slik at man har:

(Aw)(At)(wêI & têT → f(h(w)(t)) = h'(w)(t))

Det skulle ikke være vanskelig å se at denne relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Det dreier seg derfor om en ekvivalensrelasjon.

Det teoremet som ble nevnt ovenfor kan formuleres slik:

Teorem 7.1 Anta S=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur der I er mengden av mulige verdener og T er en mengde med tidspunkter. Anta h: I - (1-1,på) → Q^T. Anta videre at det finnes en mengde X der Cd(X) >= Alef;0 og at Cd(Q) = Cd(Pt(X)). Da finnes det en egenskapsstruktur S'=<A,D,T> slik at om S* er den kanoniske tilstandsstrukturen bestemt av

© 2010 Morten Harboe Rognes

S' så er S* isomorf med S.[2]

Bevis: Gitt forutsetningene i satsen skal vi konstruere en viss egenskapsstruktur S'. Siden kardinaltallet til X er overtellbart har vi at det finnes overtellbare mengder Z og D der (1) Cd(ZxD) = Cd(X). Det følger da at Pt(ZxD) er likemektig med Pt(X) og derfor likemektig med Q. Fra dette følger at det finnes en en-entydig avbildning ξ av Pt(ZxD) på Q. Vi har med andre ord at det finnes ξ der:

(2) ξ: Pt(ZxD) -(1-1,på)→ Q

Det er meningen at D skal representere objektene i egenskapsstrukturen S og at elementene i Z er slags "tokens" for egenskapene i strukturen. Vi skal straks konstruere mengden av egenskaper i strukturen S'.

Vi har at (3) h(w);têQ om têT og wêI. Det følger fra dette at ξ;-1(h(w);t)êPt(ZxD) og derfor at (4) ξ;-1(h(w);t) Inkl ZxD om têT og wêI.

For hver qêZ definerer vi en ekstensjonsfunksjon E(q) ved å sette:

(5) E(q)(w) = Mg(<x,t>: têT &xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t))

Man har altså at:

(6) E(q) = λ/wêI/(Mg(<x,t>: têT &xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t)))

Egenskapen som er entydig bestemt av ekstensjonsfunksjonen E(q) betegner vi med E*(q). Vi har derfor at (7) (Aw)(wêI → Ekst;w(E*(q)) = E(q)(w)).

Vi skulle nå være istand til å definere egenskapsstrukturen S' = <A',D',T'>. Vi setter D'=D, T'=T og A'= Mg(E*(q): qêZ). Det som det nå er nødvendig å gjøre er å vise at denne strukturen S' har de egenskapene som den skal ha ifølge teoremet.

Vi skal først vise at λ/qêZ/(E(q)) er en en-entydig funksjon. Det skulle være opplagt at det dreier seg om en funksjon og at dens domene er Z.

Anta (8) E(q) = E(q') for vilkårlige q,q'êZ. Vi skal da vise at q=q'. Fra (8) og definisjonen av E(q), ie. (6) følger:

(9) (Aw)(At)(Ax)(xêD &wêI & têT →. <q,x>êξ;-1(h(w);t) ↔ <q',x>êξ;-1(h(w);t))

Nå har man at T er ikke-tom siden S er en tilstandsstruktur. Dessuten følger det fra det som ble nevnt innledningsvis at D er ikke-tom. Det må derfor finnes entiteter x0,t0 der vi har (10) x0êD & t0êT. Fra dette og (9) følger:

(11) (Aw)(wêI →. <q,x0>êξ;-1(h(w);t0) ↔ <q',x0>êξ;-1(h(w);t0))

Vi må åpenbart ha at (12) {<q,x0>} Inkl Pt(ZxD) og derfor at det finnes en sêQ slik at (13) ξ;-1(s) = {<q,x0>}. Siden en forutsetning i satsen er at h: I -(1-1,på) → Q^T må det finnes en w1êI slik at h(w1)(t0) = s. Vi må i såfall ha at

(14) ξ;-1(h(w1);t0) = ξ;-1(s) = {<q,x0>}. Siden w1êI følger ved hjelp av (11) at

(15) <q,x0>êξ;-1(h(w1);t0) ↔ <q',x0>êξ;-1(h(w1);t0) Fra (14) og (15) følger siden <q,x0>ê{<q,x0>}=ξ;-1(h(w1);t0) at <q',x0>ê{<q,x0>}. Herav har vi så at <q,x0>=<q',x0> og derfor q=q'. Dette viser at λ/qêZ/(E(q)) er en-entydig.

Setter vi e= λ/qêZ/(E(q)) har vi altså at

(16) e: Z -(1-1,på)→ Mg(E(q):qêZ)

La nå S*=<I,T,Q*,h*> være den kanoniske tilstandsstrukturen assosiert med egenskapsstrukturen S' = <A',D',T'> som vi har definert ovenfor. For å fullføre bevise for satsen må vi vise at S* er isomorf med tilstandsstrukturen S. Det vil være tilstrekkelig å konstruere en en-entydig avbildning ψ: Q* på Q som er slik at

2 Merk at dersom x er en mengde betegner Cd(x) kardinaltallet til mengden x. Alef;0 betegner det minste kardinaltallet i rekken av kardinaltall som ikke er endelig

© 2010 Morten Harboe Rognes

(17) $(Aw)(At)(w\hat{e}I \ \& \ t\hat{e}T \rightarrow \psi(h^*(w);t) = h(w);t)$

Vi skal etterhvert gjøre dette.

Først defineres en funksjon φ ved at vi setter: (18) $\varphi(<q,x>) = <E^*(q),x>$ om $x\hat{e}D$ og $q\hat{e}Z$. Det er da nødvendig å bevise:

(18) $\varphi: ZxD \text{ -(1-1,på)}\rightarrow A'xD'$

Dette skal vi gjøre nedenfor. Vi definerer så en funksjon κ ved å sette:

(19) $\kappa(a) = <\varphi"a, A'xD'- \varphi"a>$ for alle $a\hat{e}Pt(ZxD)$

Det er da nødvendig å vise at

(20) $\kappa: Pt(ZxD) \text{ -(1-1,på)}\rightarrow Q^*$

Endelig definerer vi ψ ved å sette:

(21) $\psi(x) = \xi(\kappa;-1(x))$ om $x\hat{e}Q^*$.

Det gjenstår nå å vise at (18) og (20) holder. Dessuten må vi vise at $\psi: Q^*\text{-(1-1,på)}\rightarrow Q$ og (17) holder. Vi starter med (18):

Ad (18): Vi har vist at E* avbilder Z en-entydig på Mg(E*(q): qêZ). Det følger umiddelbart fra dette at φ, slik denne funksjonen ble definert ovenfor, avbilder ZxD en-entydig inn i A'xD'. Det eneste som det er nødvendig å bevise er at φ er på A'xD'. Anta derfor for vilkårlig r at $r\hat{e}A'xD'$. Da har vi $r=<z,x>$ der $z\hat{e}A'$ og $x\hat{e}D'=D$ for noe z,x. Det følger siden $z\hat{e}A'$ at $z= E^*(q)$ for noe $q\hat{e}Z$. Vi har derfor $r= <E^*(q),x>$ for $x\hat{e}D$ og $q\hat{e}Z$. Sett $r0=<q,x>$. Det følger da umiddelbart at $r0\hat{e}ZxD$ og at $\varphi(r0) =r$. Vi har altså at om $z\hat{e}A'xD'$ så finnes det $r\hat{e}ZxD$ slik at $\varphi(z)=r$. Dette viser at φ er på A'xD', og dermed at (18) holder.

De følgende påstander holder generelt: Er f en funksjon som avbilder en mengde A en-entydig på en mengde B vil også g definert som $Mg(<a,f"a>: a\hat{e}Pt(A))$ være en en-entydig avbildning av Pt(A) på Pt(B). Videre vil funksjonen $H=Mg(<a,<f"a,B-f"a>>: a\hat{e}Pt(A))$ være en en-entydig avbildning av Pt(A) på $Mg(<x,B-x>: x\hat{e}Pt(B))$.

Ved hjelp av disse generelle satsene ser man at at (20) følger fra (18). Siden (18) kan anses som godtgjort kan man derfor også anse (20) som etablert.

Siden Q* per definisjon er $Mg(<x,A'xD'-x>: x\hat{e}Pt(A'xD'))$ skulle det være ganske klart ar $\kappa;-1: Q^* \text{ -(1-1,på)}\rightarrow Pt(ZxD)$ og derfor at $\psi=\lambda/x\hat{e}Q^*/(\xi(\kappa;-1(x)))$ er en en-entydig avbildning av Q* på Q. Det gjenstår derfor bare å vise at (17) holder ie. at vi har $\psi(h^*(w);t) = h(w);t$ om $w\hat{e}I$ og $t\hat{e}T$.

La nå <w,t> være et vilkårlig element i IxT. Etter definisjonen av h* i den kanoniske tilstandsstrukturen <I,T,Q*,h*> assosiert med <A',D',T'> har vi at

(22) $h^*(w);t = <Mg(<a,x>: a\hat{e}A' \ \& x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(a)),$
$A'xD - Mg(<a,x>: a\hat{e}A' \ \& x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(a))>$

Setter vi $a0 = Mg(<a,x>: a\hat{e}A' \ \& x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(a))$ følger det fra dette at man har:

(23) $h^*(w);t = <a0, A'xD - a0>$. Fra dette følger videre at

(24) $\psi(h^*(w);t) = \xi(\kappa;-1(<a0,A'xD-a0>)$

Det vil nå være tilstrekkelig å vise to ting, nemlig:

(25.1) $\varphi"(\xi;-1(h(w);t)) = a0$ og

(25.2) $A'xD - \varphi"(\xi;-1(h(w);t)) = A'xD - a0$

Det siste, (25.2), følger naturligvis fra det første. Holder (25.1) har vi at

$\kappa;-1(<a0,A'xD-a0>) = \xi;-1(h(w);t))$ og derfor at $\xi(\kappa;-1(h^*(w);t))= h(w);t$ som er det vi ønsker. Det gjenstår derfor bare å vise at (25.1) holder.

Nå har vi:

$a0 = Mg(<a,x>: a\hat{e}A' \ \& x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(a))$
$= Mg(<a,x>: a\hat{e}Mg(E^*(q):q\hat{e}Z) \ \& x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(a))$
$= Mg(<a,x>: (Eq)(a= E^*(q) \ \& \ q\hat{e}Z) \ \& \ x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(a))$
$= Mg(<E^*(q),x>: q\hat{e}Z \ \& \ x\hat{e}D \ \& <x,t>\hat{e}Ekst;w(E^*(q)))$

© 2010 Morten Harboe Rognes

= Mg(<E*(q),x> : qêZ & xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t)) (Jmf. (5) ovenfor)

I lys av dette vil det være tilstrekkelig å vise:

(26) φ"(ξ;-1(h(w);t)) = Mg(<E*(q),x> : qêZ & xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t))

for å etablere (25.1). Vi viser derfor at (26) holder:

(i) Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig z at zêφ"(ξ;-1(h(w);t)). Da er z= φ(r) for noe rêξ;-1(h(w);t). Det må da finnes qêZ og xêD slik at r=<q,x> og <q,x>êξ;-1(h(w);t). Da har vi φ(r) = φ(<q,x>) = <E*(q),x> og derfor at z= <E*(q),x> for q,x der qêZ og xêD, og hvor <q,x>êξ;-1(h(w);t). Da har vi åpenbart at zêMg(<E*(q),x> : qêZ & xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t)). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

(ii) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre. Anta på den annen side for vilkårlig z at zêMg(<E*(q),x> : qêZ & xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t)). Da må det finnes q,x slik at z= <E*(q),x> & qêZ & xêD & <q,x>êξ;-1(h(w);t). Sett r= <q,x>. Da har vi åpenbart at rêξ;-1(h(w);t) og at z=φ(r). Det følger at zêφ"ξ;-1(h(w);t). Dette viser at inklusjonen mot venstre holder.

Dermed har vi vist at (25.1) holder og følgelig gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§7 Understrukturer til egenskapsstrukturer

Formålet med denne paragrafen som avslutter dette skrift er bare å nevne noen elementære egenskaper til det vi vil kalle understrukturer til egenskapsstrukturer. Vi har bruk dette i senere arbeider.

Er S= <A,D,T> en egenskapsstruktur vil også en struktur av typen <A',D',T'>, der komponentene A',D' og T' er ikke-tomme og inkludert i henholdsvis A,D og T, være en egenskapsstruktur. Vi skal kalle en slik struktur for en *understruktur* av S. La oss først gi en formell definisjon av dette understruktur-begrepet.

Definisjon 7.1 Anta S=<A,D,T> og S' = <A',D',T'> er egenskapsstrukturer. Da sier vi at S' er en understruktur til S, eller at S' er inkludert i S, hvis og bare hvis

(i) A' Inkl A
(ii) D' Inkl D
(iii) T' Inkl T

Den satsen vi nå skal gi bevis for er av en ganske elementær natur:

Teorem 7.1 Anta S=<A,D,T> og S'=<A',D',T'> er egenskapsstrukturer og at S' er en understruktur av S. Da gjelder de følgende påstander:

(i) Ekv;S Inkl Ekv;S'
(ii) E(S') Inkl E(S)
(iii) C(E(S')) Inkl C(E(S))
(iv) U(Ekv;S') Inkl U(Ekv;S)
(v) Pos(S') Inkl Pos(S)
(vi) Neg(S') Inkl Neg(S)
(vii) ElemH(S') Inkl ElemH(S)
(viii) Hend(S') Inkl Hend(S)

© 2010 Morten Harboe Rognes

(ix) Hend*(S') Inkl Hend(S)

Selv om denne satsen i det vesentlig er temmelig triviell gir vi et detaljert bevis:

Bevis: *Ad (i)*: Anta for vilkårlige mulige verdener w,w' at <w,w'>êEkv;S. Etter definisjonen av Ekv;S har vi da:

(1) (Af)(Ax)(At)(fêA & <x,t>êDxT → (<x,t>êEkst;w(f) ↔ <x,t>êEkst;w'(f)))

Siden S' er en understruktur av S har vi A' Inkl A, D Inkl D' og T' Inkl T. Fra dette og (1) følger åpenbart (Af)(Ax)(At)(fêA' & <x,t>êD'xT' → (<x,t>êEkst;w(f) ↔ <x,t>êEkst;w'(f)))Herav følger så ved hjelp av definisjonen Ekv at Ekv;S'. Dette viser at punkt (i) holder.

Ad(ii): Vi har per definisjon at

E(S') = Mg(μ;-1(Mg(w: wêI & <x,y>êEkst;w(f))) : <x,y>êD'xT' & fêA') Er z et vilkårlig element i E(S') har vi derfor at det finnes x,y,f slik at

z= μ;-1(Mg(w: wêI & <x,y>êEkst;w(f))) der <x,y>êD'xT' & fêA'

Det følger siden A' Inkl A, D' Inkl D og T' Inkl T at

z= μ;-1(Mg(w: wêI & <x,y>êEkst;w(f))) og <x,y>êDxT & fêA. Fra dette følger så zêE(S). Siden z var vilkårlig har vi at E(S') Inkl E(S).

Ad(iii): Vi har generelt dersom a og b er utsagnsmengder at C(a) Inkl C(b) dersom a er inkludert i b. Siden E(S') Inkl E(S) følger ved hjelp av denne sats at C(E(S')) Inkl C(E(S)). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Per definisjon har vi at U(Ekv;S'), mengden av utsagn generert av ekvivalensrelasjonen Ekv;S', er Mg(u: uêU & (Ec)(c Inkl (Ekv;S')* & μ(u) = UN(c))) Anta nå for vilkårlig u at uêU(Ekv;S'). Da følger det at det finnes en mengde c der vi har: (2) c Inkl (Ekv;S')* & μ(u) = UN(c). La nå (3) c' = Mg(Mg(w':<w',w>êEkv;S): wêUN(c)). Da har vi åpenbart at (4) c' Inkl (Ekv;S)*. Vi skal vise at (5) UN(c')=UN(c). Dette vil være tilstrekkelig å bevise siden det fra dette, (2) og (4) følger at

c' Inkl (Ekv;S)* & μ(u)= UN(c'). Herav har vi så uêU(Ekv;S)

Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at w'êUN(c'). Da finnes det xêc' slik at w'êx&xêc'. Siden xêc' må det finnes w0êUN(c) slik at x= Mg(w': <w',w0>êEkv;S). Siden w'êx følger at <w',w0>êEkv;S. Fra det at w0êUN(c) følger at det finnes y slik at w0êy yêc. Fra yêc følger at y= Mg(w': <w',w1>êEkv;S') for noe w1êI. Siden w0êy har vi da <w0,w1>êEkv;S'. Siden S' er en substruktur av S har vi Ekv;S Inkl Ekv;S' i følge punkt (i) og derfor, siden <w',w0>êEkv;S at <w',w0>êEkv;S'. Fra dette og det at <w0,w1>êEkv;S' følger <w',w1>êEkv;S' og derfor w'êy. Men yêc. Det følger at w'êUN(c).

La oss så ta for oss inklusjonen mot venstre. Anta w'êUN(c) for vilkårlig verden w'. Sett nå q= Mg(w: <w,w'>êEkv;S). Siden w'êUN(c) er det åpenbart at qêc'. Siden Ekv;S er en ekvivalensrelasjon er den refleksiv. Det følger derfor at w'êq. Derfor w'êq&qêc'. Herav har vi så w'êUN(c'). Dette viser at inklusjonen mot venstre holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (iv).

Ad (v): Anta hêPos(S'). Da har vi at h=<1,f,<x,t>> der fêA' & <x,t>êD'xT'. Siden S' er en substruktur av S følger det at fêA og <x,t>êDxT. Da har vi hêPos(S).

Ad (vi): Dette bevises på samme måte som (v).

Ad (vii): Dette følger direkte fra punkt (v) og (vi) ved hjelp av definisjonen av elementærhendelse.

Ad (viii): Anta hêHend(S'). Da har vi at h Inkl ElemH(S') & h≠ø. Dette følger fra definisjonen av en sammensatt hendelse. Siden vi har vist under (vii) at

ElemH(S') Inkl ElemH(S)

© 2010 Morten Harboe Rognes

følger det at h≠ø & h Inkl ElemH(S). Dette viser at påstanden holder.

Ad (ix): Anta HêHend*(S'). Fra definisjonen av hendelse i utvidet forstand har vi da:

(a) ø≠H Inkl Hend(S')

(b) (Ah)(hêH → (Ew)(wêI & (Aa)(aêh → Real(a,w))))

(c) (Ah)(Ah')(h,h'êH & h≠h' →
¬(Ew)(wêI & (Aa)(aêh → Real(h,w)) & (Aa)(aêh' → Real(h',w))))

Nå følger det fra foregående punkt at at Hend(S') Inkl Hend(S). Fra dette og (a)-(c) har vi:

(a') ø≠H Inkl Hend(S)

(b') (Ah)(hêH → (Ew)(wêI & (Aa)(aêh → Real(a,w))))

(c') (Ah)(Ah')(h,h'êH & h≠h' →
¬(Ew)(wêI & (Aa)(aêh → Real(h,w)) & (Aa)(aêh' → Real(h',w))))

Fra dette følger åpenbart at HêHend*(S). Dette viser at (ix) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

© 2010 Morten Harboe Rognes

Referanser

Rognes [1] Rognes, Morten. *Om notasjonen som benyttes i mine arbeider,* Upublisert manuskript, 2005

Rognes [2] Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Upublisert manuskript, 1985

Rognes [3] Rognes, Morten. *En teori om presise deskriptive utsagn.* Upublisert manuskript, 1985

Rognes [4] Rognes, Morten. *Egenskaper. Del I.* Upublisert manuskript, 1986

Rognes [5] Rognes, Morten. *Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)* , Upublisert manuskript, 1987

Rognes [6] Rognes, Morten, *Et normalformteorem i teorien om presise deskriptive utsagn,*Upublisert manuskript. 1985

Rognes [7] Rognes, Morten, *Tilstandsstrukturer og insiden*s, Upublisert manuskript, 2008

© 2010 Morten Harboe Rognes